АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ СССР
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

М.К. Гольдберг, И.А. Клипкер

МИНИМАЛЬНЫЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ДЕРЕВЬЕВ НА ПРЯМОЙ

П р е п р и н т
(18 октября 1976 года)

Харьков-1976

Academy of Sciences of the Ukrainian SSR
Physico-Technical Institute of Low Temperatures

MINIMAL PLACING OF TREES ON A LINE

M.K. Gol'dberg, I.A. Klipker

An algorithm is described which places the vertices of an arbitrary tree on the integer line in such a way that the sum of resulting edge lengths is minimal. It is proved that the complexity of the algorithm does not exceed Cn^3 where C is a constant and n is a number of vertices.

УДК 519.I

Описан алгоритм, размещающий вершины произвольного дерева на целочисленной прямой таким образом, чтобы сумма получающихся длин ребер была минимальна. Доказано, что сложность алгоритма не превосходит Cn^3, где C – некоторая константа, n – число вершин.

М.К. Гольдберг, И.А. Клипкер

МИНИМАЛЬНЫЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ДЕРЕВЬЕВ НА ПРЯМОЙ

I. Для задачи размещения графа на целочисленной прямой с наименьшей суммой длин всех ребер не известны алгоритмы, для которых различие между деревом и графом общего вида сказалось бы явным образом на оценке сложности вычислений. Метод последовательного анализа вариантов, предложенный в работе [1], а затем в [2] имеет экспоненциальную сложность независимо от структуры графа. Алгоритмы размещения деревьев, рассматриваемые в работах [3–5], имеют полиномиальную сложность, однако, дают приближенное решение.

В настоящей статье указывается полиномиальной сложности алгоритм минимального размещения дерева. Предлагаемый алгоритм имеет рекуррентный характер: минимальное размещение дерева определяется по некоторым размещениям его поддеревьев, причем число поддеревьев, подлежащих просмотру, зависит от структуры дерева и в общем случае невелико, что и обеспечивает полиномиальную сложность алгоритма.

Несколько слов о структуре статьи. Раздел 2 имеет вводный характер. Центральным результатом раздела 3 является теорема 5. Разнообразное использование ее и приводит к алгоритму, сформулированному в разделе 4. То, что алгоритм действительно находит минимальное размещение, немедленно следует из теорем 7,8 раздела 4. Эти теоремы – центральные в статье.

2. Рассматриваемые графы неориентированные, без петель и кратных ребер. Для графа G через $V(G)$ и $E(G)$ обозначаются соответственно множества вершин и ребер; $v(G)=|V(G)|$, $e(G)=|E(G)|$.

Напомним некоторые определения и результаты. Если T -дерево, L - цепь в нем, то компоненты связности графа, полученного из T удалением ребер из L, называются поддеревьями, свисающими с L. Пусть $x \in V(T)$. Ветвью x называется максимальное поддерево, содержащее x в качестве висячей вершины. Наибольшее число ребер ветви в данной вершине называется весом вершины. Вершина минимального веса называется центром масс. Вес центра масс $\leqslant \frac{v(T)}{2}$; в каждом дереве имеется не более двух центров масс; если их два, то они смежны. Легко доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть F - ветвь вершины x дерева T, имеющая максимальное число ребер, и пусть для некоторого набора F_1, F_2, ... ветвей x, отличных от F, выполняется $e(F) \leqslant e(F_1)+e(F_2)+\ldots$. Тогда x - центр масс дерева T.

Размещением графа G в целых точках прямой (в дальнейшем просто - размещением) называется мономорфное отображение φ множества $V(G)$ в множество целых чисел, иными словами, нумерация целыми числами вершин графа. Длиной ребра $u=(x,y)$ при размещении φ называется число $\ell(u,\varphi)=|\varphi(x)-\varphi(y)|$, длиной графа G при размещении φ - число $\ell(G,\varphi)=\sum_{u\in E(G)} \ell(u,\varphi)$. $\min_{\varphi} \ell(G,\varphi)$ называется длиной графа и обозначается через $\ell(G)$, соответствующее размещение (нумерация) называется минимальным.

Пусть φ - размещение n - вершинного графа G, a - целое. Упорядочим вершины G согласно возрастанию их номеров. Если $x_1, \ldots, x_n$ - этот порядок, то определим новое размещение ψ, полагая $\psi(x_i)=i+a$ $(i=1,\ldots,n)$. Следуя [3], назовем переход от φ к ψ сжатием φ. Ясно, что $\ell(G,\varphi) \geqslant \ell(G,\psi)$, причем неравенство строгое, если хотя бы для одного i $(i=1,\ldots,n-1)$ $\varphi(x_{i+1})-\varphi(x_i) > 1$. В этом случае сжатие назовем нетривиальным. Минимальная нумерация не допускает нетривиальных сжатий, то есть множество чисел, нумерующих вершины графа, расположено на прямой без пропусков. Как правило, этим множеством будет целочисленный интервал $[1,n]$.

Вершины, имеющие при данном размещении наибольший и наименьший номера, назовем крайними. Цепь, соединяющая крайние вершины, называется базовой цепью размещения. Нетрудно доказывается (см. [3,6])

ТЕОРЕМА I. Точки сочленения графа не являются крайними при минимальном размещении.

СЛЕДСТВИЕ. При минимальном размещении дерева базовая цепь соединяет висячие вершины.

В работах [5-7] рассматривались специальные размещения деревьев, которые будем называть иерархическими. Напомним их определение.

Всякое размещение одновершинного дерева - иерархическое. Размещение φ дерева $T(v(T)>1)$ - иерархическое, если

I) φ не допускает нетривиальных сжатий;

2) крайние вершины - висячие;

3) нумерация вершин базовой цепи монотонна, то есть упорядочение вершин по возрастанию номеров совпадает с их следованием по цепи;

4) индуцированные размещения поддеревьев, свисающих с базовой цепи, иерархические.

ТЕОРЕМА 2 (см. [5-7]). Всякое минимальное размещение -иерархическое. Индуцированные размещения поддеревьев, свисающих с базовой цепи, минимальны.

Пусть x - висячая вершина дерева T. Размещение T назовем x - корневым (или просто корневым, когда ясно, какая вершина корень), если x при этом размещении - крайняя. Минимально возможную длину дерева T при x - корневом размещении обозначим через $\ell_x(T)$, а соответствующее размещение назовем минимальным x - корневым. Справедлива

ТЕОРЕМА 2'. Всякое минимальное x -корневое размещение - иерархическое. Индуцированные размещения поддеревьев, свисающих с базовой цепи, минимальны.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2 и также может быть опущено.

Пусть дана некоторая индексация ребер дерева, то есть определена функция, сопоставляющая каждому ребру натуральное число. Ребро, индекс которого равен k, назовем k - ребром.

Индексацию назовем правильной[I)], если выполняется условие: для любого целого $s = 1,2,\ldots$ после удаления всех k -ребер $(k \leqslant s-1)$ в каждой неодновершинной компоненте связности s -ребра составляют цепь, соединяющую висячие вершины компоненты.

I) Это понятие было введено авторами в работе [6], где использовалось для построения алгоритма линейной сложности, дающего минимальное размещение равномерного дерева.

Каждому иерархическому размещению дерева, имеющему более одной вершины, следующим образом сопоставим правильную индексацию: если T – цепь, то всем ребрам приписывается индекс I; если T не является цепью, выделяем базовую цепь и свисающие с нее неодновершинные поддеревья. Размещения этих поддеревьев – иерархические, поэтому можно считать, что для них правильные индексации уже определены. Теперь определяем индексацию на всем дереве, приписывая ребрам базовой цепи индекс I, а индексы ребер свисающих поддеревьев увеличивая на I. Очевидно, что полученная индексация правильная. В [6] доказана

ТЕОРЕМА 3. Если r – индексация ребер, соответствующая иерархическому размещению φ дерева T, то

$$\ell(T,\varphi)=\sum_{u\in E(T)} r(u).$$

Нетрудно указать алгоритм (см. [6]), строящий по данной правильной индексации иерархическое размещение, для которого индексация, сопоставленная по описанному выше правилу, совпадает с исходной.

В дальнейшем мы будем опускать эпитет "правильная", если это не ведет к двусмысленности, и, кроме того, индексацию с минимальной суммой индексов будем называть минимальной. Ясно, что минимальной индексации соответствует (и, вообще говоря, не одно) минимальное размещение. Наконец, индексацию, соответствующую корневому размещению, назовем корневой, а минимальному корневому – минимальной корневой индексацией.

3. Из теорем 2 и 2′ следует, что поиск минимального и, аналогично, минимального корневого размещения дерева сводится к отысканию базовой цепи в самом дереве, а затем и в свисающих с нее поддеревьях. При последовательном проведении базовой цепи, с какой бы висячей вершины она не начиналась, необходимо решать такую задачу. Известен участок базовой цепи, заканчивающийся некоторой вершиной y, и предшествующая y вершина x базовой цепи. Среди вершин, смежных y и отличных от x, нужно определить ту, которая может продолжить базовую цепь. При этом ветвь, содержащая выбранную вершину, получит минимальное y – корневое размещение. Ясно, что метод проведения базовой цепи станет эффективным, если будет отсечено достаточное число вариантов ее продолжения. Для этого нам понадобятся оценки разности между длинами дерева при минимальном корневом и минимальном размещениях. Их дает

ТЕОРЕМА 4. Пусть x – висячая вершина дерева T. Тогда[2], при $v(T)\geq 2$

$$\ell_x(T)-\ell(T-x)\leq\left[\frac{v(T)}{2}\right],$$

а при $v(T)\geq 4$

$$\ell_x(T)-\ell(T)\leq\left]\frac{v(T)-5}{2}\right[.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оба неравенства доказываются по одной схеме, поэтому укажем лишь доказательство одного из них, а именно второго.

Пусть φ – минимальное размещение T, y – единственная смежная с x вершина и пусть $\varphi(x)=i$, $\varphi(y)=j$. Очевидно, можно считать, что $i<j$. Построим x-корневую нумерацию дерева T, для чего, не меняя номеров вершин, отличных от x, придадим x номер 0, если $j\leq\frac{n}{2}+1$, и номер $n+1$, если $j\geq\frac{n}{2}+1$. (Здесь $n=v(T)$). В обоих случаях, как легко видеть, полученное размещение допускает нетривиальное сжатие на интервал $[1,n]$. Произведя его, получим x – корневую нумерацию, длина которой превосходит $\ell(T)$ не более, чем на $\left]\frac{n-5}{2}\right[$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оценки теоремы 4 точны. Деревья, на которых они достигаются, имеют следующий вид: простая цепь, к центру которой подвешено концевое ребро с висячей вершиной x. Отметим также, что для деревьев с числом вершин <3 минимальное корневое размещение является минимальным.

Вернемся к правильным индексациям дерева. Пусть T – дерево, r – его индексация.

Если S – поддерево T, то через $indS$ обозначим минимальный из индексов ребер поддерева.

Если для ветви P вершины x $indP$ равен индексу ребра ветви, инцидентного x, то скажем, что ветвь P имеет корневую подиндексацию.

---

2) $T-x$ обозначает, как обычно, дерево, полученное из T удалением вершины x.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть дана минимальная индексация r дерева T, при которой ветвь P вершины x имеет корневую подиндексацию. Тогда

$$\sum_{u\in E(P)} r(u) = \ell_x(P) + (ind P - 1)\, e(P).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уменьшив индексы всех ребер ветви P на $ind P - 1$ и рассмотрев P как отдельное дерево, получим минимальную x - корневую индексацию P.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть r - минимальная индексация дерева, при которой ветви P и Q некоторой вершины x имеют корневые подиндексации. Тогда, если $e(P) > e(Q)$, то $ind P \leq ind Q$. Доказательство очевидным образом следует из предложения 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть S - поддерево дерева T, на котором определена минимальная индексация r. Тогда

$$\ell(S) + (ind S - 1) e(S) \leq \sum_{u\in E(S)} r(u).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко понять, что утверждение достаточно доказать в случае $ind S = 1$.

Неравенство непосредственно проверяется для поддеревьев с числом вершин < 4. Пусть оно доказано для поддеревьев с числом вершин $< p$ и пусть в T дано поддерево S, у которого $v(S) = p \geq 4$.

Из определения правильности индексации r и связности S следует, что I-ребра образуют в S цепь. Обозначим ее через C. Пусть $z_1, \dots, z_m$ - последовательность вершин $C, S_1, \dots, S_m$ - соответственно упорядоченная последовательность поддеревьев S, свисающих с C. Очевидно, $v(S_i) < p$, $ind S_i \geq 2$ $(i = 1, \dots, m)$.

Рассмотрим в S поддеревья S'_1 и S'_m, порожденные множествами $V(S_1) \cup \{z_2\}$ и $V(S_m) \cup \{z_{m-1}\}$ соответственно, и определим на них минимальные корневые индексации r_1 и r_m с корнями z_2 для S'_1 и z_{m-1} для S'_m. Для каждого $i = 2, \dots, m-1$ определим также минимальную индексацию r_i дерева S_i. Наконец, построим индексацию r' дерева S, полагая

$$r'(u) = \begin{cases} 1, & u \in E(C) \\ 1 + r_i(u), & u \in E(S_i) \quad i = 2, \dots, m-1 \\ r_i(u), & u \in E(S'_i) \quad i = 1, m \end{cases}$$

Очевидно, что r' - правильная индексация, и поэтому

$$\ell(S) = \sum_{u\in E(S)} r'(u).$$

С другой стороны из индуктивного предположения следует

для $i = 2, \dots, m-1$ $\sum_{u\in E(S_i)} r'(u) \leq \sum_{u\in E(S_i)} r(u)$, (I)

а для $i = 1, m$ $\ell(S_i) + e(S_i) \leq \sum_{u\in E(S_i)} r(u)$. (2)

По теореме 3 при $i = 1, m$

$$\Big(1 + \sum_{u\in E(S_i)} r'(u)\Big) - \ell(S_i) \leq \left[\frac{v(S_i)+1}{2}\right],$$

следовательно

$$\ell(S_i) + e(S_i) \geq 1 + \sum_{u\in E(S_i)} r'(u) - \left[\frac{v(S_i)+1}{2}\right] + v(S_i) - 1 \geq \sum_{u\in E(S_i)} r'(u).$$

Учитывая неравенство 2, получаем, что неравенство I справедливо и для $i = 1, m$, что заканчивает доказательство.

ТЕОРЕМА 5. Пусть x - висячая вершина дерева T, y - смежная с ней, w - вес y $(w \geq 3)$, Q - ветвь y, не содержащая x, для которой $e(Q) \leq \left[\frac{w}{2}\right] + 1$. Тогда при любой минимальной x -корневой индексации дерева T базовая цепь не проходит через Q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим какую-нибудь x -корневую индексацию r, при которой $ind Q = 1$ и построим новую индексацию с меньшей суммой индексов ребер.

Пусть P - ветвь с наибольшим числом w ребер, z -вершина P, смежная с y, $p = ind P$, $q = ind(x, y)$. Из предложения 3 следует $1 < p < q$.

Удалим все ребра дерева, индекс которых $< p$ и рассмотрим в оставшемся графе компоненту связности S, которая содержит ребро (x, y). Затем удалим из S все вершины ветви P, за исключением вершин y и z. Пусть r_1 - минимальная z - корневая индексация ребер полученного дерева S'. Кроме того, через r_2 обозначим минимальную y -корневую индексацию ребер ветви P. Новую x -корневую индексацию r ребер дерева T определим равенством

$$\bar{r}(u) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad u = (x, y), \\ r(u) + p - 1 & \text{при} \quad u \in E(Q), \\ r_1(u) + p - 1 & \text{при} \quad u \in E(S),\ u \neq (x, y), \\ r_2(u) & \text{при} \quad u \in E(P), \\ r(u) & \text{при} \quad u \notin E(P),\ u \notin E(Q), u \notin E(S). \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в правильности индексации $\bar{z}$. Пусть $\ell=\sum_{u\in E(T)} z(u)$, $\bar{\ell}=\sum_{u\in E(T)} \bar{z}(u)$. Тогда, используя предложение 4, получим

$$\ell-\bar{\ell}\geqslant(p-1)(e(P)-e(Q))-(\ell_y(P)-\ell(P))-(\ell_z(S)-\ell(S-z))+e(S).$$

Справедливы неравенства

$$e(Q)\leqslant\left[\frac{w}{2}\right]+1,\ \ell_y(P)-\ell(P)\leqslant\left]\frac{e(P)}{2}\right[-2,\ \ell_z(S)-\ell(S-z)\leqslant\left[\frac{e(S)+1}{2}\right],$$

откуда

$$\ell-\bar{\ell}\geqslant(p-1)\left(\left]\frac{w}{2}\right[-1\right)-\left]\frac{w}{2}\right[+2-\left[\frac{e(S)+1}{2}\right]+e(S)\geqslant 1+e(S)-\left[\frac{e(S)+1}{2}\right]>0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда вес вершины $\leqslant 2$, теорема не верна, однако определить в этом случае, через какую ветвь проходит базовая цепь, не представляет труда – цепь проходит через любую ветвь максимального веса.

Произведем следующую классификацию ветвей вершины дерева: ветви максимального веса w назовем большими; ветви, вес которых e удовлетворяет ограничениям $\left[\frac{w}{2}\right]+1<e<w$, назовем средними; остальные ветви вершины назовем малыми. Большие и средние ветви будем называть главными. Кроме того будем говорить, что ветвь P вершины мала по отношению к ветви Q в той же вершине, если $e(P)\leqslant\left[\frac{e(Q)}{2}\right]+1$.

Пусть дана минимальная индексация дерева T. Рассмотрим какое-нибудь ребро $u=(x,y)$ базовой цепи и ветвь T' вершины x, которая содержит y. Очевидно, ограничение исходной индексации на ребрах T' дает минимальную x-корневую индексацию этого дерева. Отсюда следует

ТЕОРЕМА 5'. При минимальной индексации дерева для любой вершины базовой цепи ветви индекса I не являются малыми по отношению к ветвям с большим индексом.

Теперь легко вывести теорему о центре масс, доказанную ранее в [8].

ТЕОРЕМА 6. При минимальном размещении дерева базовая цепь проходит через центр масс.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим индексацию дерева T, при которой базовая цепь не проходит через центр масс z. Среди вершин базовой цепи выберем ближайшую к z и рассмотрим ту ветвь выбранной вершины x, которая содержит z. Очевидно, число ребер этой ветви $>\frac{e(T)+1}{2}$, следовательно одна из ветвей индекса I в вершине x имеет $<\frac{e(T)-1}{4}$ ребер и по теореме 5' индексация не минимальна.

4. Пусть x – висячая вершина дерева T, y – смежная с ней. Ветви y, не содержащие x, упорядочим по невозрастанию чисел ребер. Пусть $R_1,\dots,R_{p+q}$ – главные ветви этого порядка, из них $F_1,\dots,F_p$ – большие, $G_1,\dots,G_q$ – средние ($F_\alpha=R_\alpha$, $G_\beta=R_{p+\beta}$). Обозначим через H поддерево, порожденное вершинами малых ветвей, не содержащих x.

x – корневую индексацию назовем стандартной, если все большие ветви имеют корневые подындексации и при этом $1=\operatorname{ind}F_1<\dots$

$$\dots<\operatorname{ind}F_{2\alpha}=\operatorname{ind}F_{2\alpha+1}<\dots\leqslant\operatorname{ind}F_p\leqslant\min(\operatorname{ind}H,\operatorname{ind}G_1,\dots,\operatorname{ind}G_q).$$

x – корневую индексацию назовем квазистандартной, если все главные ветви, кроме одной большой – F_i и в случае нечетного $p+q$, быть может, одной средней имеют корневые подындексации. При этом, если $R'_1,\dots,R'_t$ – последовательность главных ветвей, из которой удалена ветвь F_i и в случае нечетного $p+q$ некоторая средняя ветвь G_j, то все ветви этой последовательности имеют корневые подындексации и $1=\operatorname{ind}R'_1<\dots$

$$\dots<\operatorname{ind}R'_{2\alpha}=\operatorname{ind}R'_{2\alpha+1}<\dots\leqslant\operatorname{ind}R'_t<\operatorname{ind}F_i<\min(\operatorname{ind}H,\operatorname{ind}G_j).$$

Опишем[3)] конструктивно квазистандартную индексацию. Для этого построим поддерево S, порождаемое множеством $V(F_i)\cup V(G_j)\cup V(H)$ $(1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant q)$ или множеством $V(F_i)\cup V(H)$ $(1\leqslant i\leqslant p)$ соответственно при нечетном или четном $p+q$. Пусть z' – индексация S, базовая цепь, которой состоит целиком из ребер F_i. Далее, если $R'_1,\dots,R'_t$ – последовательность главных ветвей, полученная из исходной последовательности

3) При изучении корневых индексаций будем пользоваться введенными выше обозначениями без дополнительных пояснений.

$R_1, \dots, R_{p+q}$ удалением ветвей, участвующих в построении S, то через z_α обозначим y-корневую индексацию R'_α $(\alpha=1,\dots,t)$. Наконец,

$$z(u)=\begin{cases} 1, & u=(x,y), \\ z_\alpha(u)+\left[\frac{\alpha}{2}\right], & u\in E(R'_\alpha),\ (\alpha=1,\dots,t), \\ z'(u)+\left[\frac{p+q}{2}\right], & u\in E(S). \end{cases}$$

Ясно, что всякая квазистандартная индексация строится по описанному рецепту.

Оценим снизу величину $\ell=\sum z(u)$. Очевидно, всегда $ind F_i=\left[\frac{p+q}{2}\right]+1$. Кроме того, если $p+q$ четное, то $ind H\geqslant\left[\frac{p+q}{2}\right]+2$, если же $p+q$ нечетное, возможны три случая:

1) $ind G_j = ind H\geqslant\left[\frac{p+q}{2}\right]+2$ и при этом подындексация G_j корневая,

2) $ind G_j\geqslant\left[\frac{p+q}{2}\right]+2$, $ind H\geqslant\left[\frac{p+q}{2}\right]+3$,

3) $ind G_j\geqslant\left[\frac{p+q}{2}\right]+3$, $ind H\geqslant\left[\frac{p+q}{2}\right]+2$.

Учитывая сказанное и предложение 4, нетрудно доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если z – квазистандартная индексация T, то

$$\ell\geqslant 1+\sum\left(\ell_y(R'_\alpha)+\left[\frac{\alpha}{2}\right]e(R'_\alpha)\right)+\ell(F_i)+\left[\frac{p+q}{2}\right]e(F_i)+\left(\left[\frac{p+q}{2}\right]+1\right)e(H)+$$

$$+\begin{cases}\left(\left[\frac{p+q}{2}\right]+1\right)e(G_j)+\Delta & \text{при нечетном } p+q, \\ \ell(H) & \text{при четном } p+q,\end{cases}$$

где $\Delta=\min\left(\ell_y(G_j)+\ell(H),\ \ell(G_j)+\ell(H)+e(H)\right)$.

Построим некоторую стандартную индексацию z^*. С этой целью определим индексацию $\bar z$, являющуюся в случае нечетного $p+q$ минимальной индексацией дерева H, а в четном случае – ограничением[4] на H минимальной x-корневой индексации поддерева H', порожденного множеством $V(H)\cup\{x\}$. Через z^*_α обозначим минимальную y-корневую индексацию ветви R_α $(\alpha=1,\dots,p+q)$. Полагаем

$$z^*(u)=\begin{cases} z^*_\alpha(u)+\left[\frac{\alpha}{2}\right] & \text{при } u\in E(R_\alpha)\ (\alpha=1,\dots,p+q), \\ \bar z(u)+\left[\frac{p+q+1}{2}\right] & \text{при } u\in E(H). \end{cases}$$

4) В этом случае индексация $\bar z$ может не быть правильной.

В дальнейшем индексацию z^* будем называть эталонной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если $\ell^*=\sum z^*(u)$, то

$$\ell^*<\sum_{\alpha=1}^{p+q}\left[\ell_y(R_\alpha)+\left[\frac{\alpha}{2}\right]e(R_\alpha)\right]+\ell(H)+\frac{p+q+1}{2}e(H)+1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В нечетном случае неравенство очевидно, а в четном достаточно воспользоваться теоремой 4.

Нам понадобится еще одно построение. Пусть дана некоторая x-корневая индексация дерева T. Для каждого целого $\alpha\geqslant 1$ удалим в T все ребра с индексом $<\alpha$ и рассмотрим компоненту связности образовавшегося графа, которая содержит y. Полученное дерево обозначим $T^{(\alpha)}$.

ТЕОРЕМА 7. Минимальная x-корневая индексация либо стандартная, либо квазистандартная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 5 одна главная ветвь имеет корневую подындексацию с индексом I. Если $p\geqslant 2$, рассмотрим какую-нибудь пару F_α, F_β больших ветвей. Пусть $2\leqslant k=ind F_\alpha\leqslant ind F_\beta$. В дереве $T^{(k)}$ центром масс является (см. предложение I) вершина y, следовательно k-ребра ветви F_α принадлежат проходящей через y базовой цепи и, стало быть, подындексация F_α корневая. Отсюда следует, что при минимальной индексации не более одной большой ветви имеет некорневую подындексацию и при этом индекс такой ветви больше индекса других больших ветвей.

Пусть подындексация всех больших ветвей корневая и k – наибольший из их индексов. Если $k\leqslant 2$, из предложения 3 выводим, что ветвью с индексом I является некоторая большая ветвь и следовательно индексация стандартная. При $k\geqslant 3$ рассмотрим деревья $T^{(2)},\dots,T^{(k-1)}$. В каждом из них по предложению I центром масс является вершина y и поэтому базовая цепь проходит через две большие ветви, откуда следует стандартность индексации.

Допустим теперь, что рассматриваемая x-корневая индексация не стандартная и F_i – большая ветвь с некорневой подындексацией. Пусть $k=ind F_i$. Ясно, что $k>1$.

Если $q\geqslant 2$, рассмотрим произвольно выбранные две средние ветви G_α, G_β. Пусть $t=ind G_\alpha<ind G_\beta$, $s=\min(t,k)$. По предложению I, центр масс дерева $T^{(s)}$ – вершина y и в силу минимальности

через нее проходит базовая цепь. Поскольку цепь не может содержать ребра F_i, $s = ind G_\alpha < ind F_i$ и подындексация G_α корневая. Это доказывает, что не более, чем у одной средней ветви индекс $\geq K$. В частности отсюда и из предложения 3 следует, что при $p \geq 2$ ветвью с индексом I является большая ветвь.

Для любого целого $\alpha (1 < \alpha < K)$ центр масс дерева $T^{(\alpha)}$ - вершина y, поскольку в противном случае для некоторого $\alpha_0 < K$ центр масс $T^{(\alpha_0)}$ - вершина из $V(F_i)$, отличная от y, и по теореме 6 $ind F_i = \alpha_0$, что невозможно. Итак, для любого α $(1 < \alpha < K)$ базовая цепь $T^{(\alpha)}$ проходит через y. Поскольку подындексация F_i некорневая, цепь не содержит ребер F_i и по теореме 5' проходит через две главные ветви, индексы которых, таким образом, совпадают и равны α. Следовательно, помимо единственной главной ветви с индексом I имеется еще четное число главных ветвей с индексом $< K$ и при этом все эти ветви имеют корневые подындексации. Отсюда вытекает, что при четном $p+q$ все главные ветви кроме F_i имеют корневые подындексации и их индексы $< K$, а при нечетном существует единственная главная ветвь - некоторая средняя ветвь G_j, у которой $ind G_j \geq K$, и подындексации всех главных ветвей, отличных от F_i и G_j, корневые.

Осталось показать, что $ind F_i < ind H$, $ind F_i < ind G_j$ (последнее в случае нечетного $p+q$). Рассмотрим дерево $T^{(s)}$, где $s = min(ind F_i, ind H)$. Ясно, что $T^{(s)}$ содержит ветвь G_j, поскольку, как было показано ранее, $ind F_i \leq ind G_j$. Поскольку вес вершины y равен числу ребер F_i, центр масс $T^{(s)}$ - вершина из $V(F_i)$. Но так как подындексация F_i некорневая, базовая цепь не содержит y и все ее ребра принадлежат $E(F_i)$. Отсюда $ind H > K$, $ind G_j > K$. Теорема доказана.

Отметим такое очевидное

СЛЕДСТВИЕ. Если у дерева T p - нечетное, $q = 0$, то всякая минимальная x-корневая индексация стандартная.

Пусть дана минимальная квазистандартная x-корневая индексация. Ясно, что с точностью до переупорядочивания номером большой ветви с некорневой подындексацией может быть любое число от I до p, в связи с чем в дальнейшем будем всегда полагать его равным p. Для средних ветвей, однако, аналогичное переупорядочивание невозможно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть z - минимальная квазистандартная x-корневая индексация дерева T с нечетным числом главных ветвей. Тогда средней ветвью с индексом большим $ind F_p$ является ветвь G_q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вопреки утверждению для некоторой ветви G_j $(j < q)$ $ind G_j > ind F_p$. Полагая $\ell = \sum z(u)$, оценим ℓ, воспользовавшись для этого предложением 5 и таким очевидным неравенством: $\Delta \geq \ell(G_j) + \ell(H)$. Оценка имеет следующий вид:

$$\ell \geq 1 + \sum\left[\ell_y(R'_\alpha) + \left[\frac{\alpha}{2}\right] e(R'_\alpha)\right] + \ell(F_i) + \left[\frac{p+q}{2}\right] e(F_i) + \frac{p+q+1}{2} e(G_j) + e(H)) + \ell(G_j) + \ell(H).$$

Если z^* - эталонная индексация и $\ell^* = \sum z^*(u)$, то $\ell^* - \ell > 0$. Сравнивая оценку для ℓ с верхней оценкой для ℓ^* (см. предложение 6), получим

$$\left[\frac{q}{2}\right] e(F_p) - (\ell_y(F_p) - \ell(F_p)) + \left[\frac{q-j+2}{2}\right] e(G_j) - (\ell_y(G_j) - \ell(G_j)) \leq$$

$$\leq \begin{cases} \sum\limits_{2\alpha<j} e(G_{2\alpha}) + \sum\limits_{\alpha>j} e(G_\alpha), & \text{если } p \text{ четное}, \\ \sum\limits_{2\alpha-1<j} e(G_{2\alpha-1}) + \sum\limits_{\alpha>j} e(G_\alpha), & \text{если } p \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Независимо от четности p слагаемые в правой части неравенства оцениваем сверху по такому правилу: слагаемые первой суммы оцениваем числом $e(F_p)$, а слагаемые второй - $e(G_j)$. Кроме того воспользуемся неравенствами, вытекающими из теоремы 4:

$$\ell_y(F_p) - \ell(F_p) \leq \frac{1}{2} e(F_p), \quad \ell_y(G_j) - \ell(G_j) \leq \frac{1}{2} e(G_j).$$

После приведения подобных, получаем

$$\left(\left]\frac{q-j}{2}\right[- \frac{1}{2}\right) e(F_p) \leq \left(\left]\frac{q-j}{2}\right[- \frac{1}{2}\right) e(G_j),$$

что, конечно, невозможно, если $j < q$.

Из доказанного предложения следует, что, если в дереве с нечетным числом главных ветвей $e(G_{q-1}) = e(G_q)$, то всякая минимальная x-корневая индексация стандартная. Более сильное достаточное условие стандартности дает

ТЕОРЕМА 8. Пусть для ветвей вершины y дерева T выполняется неравенство

$$\sum_{\alpha=1}^{q} e(G_\alpha) \leqslant \begin{cases} (q-1)e(F_1)+e(H)+3 & \text{при } p \text{ четном, } q \text{ четном,} \\ qe(F_1)+e(H)+3-e(G_1) & \text{при } p \text{ нечетном, } q \text{ нечетном,} \\ (q-2)e(F_1)+2e(G_q)+2e(H)+6 & \text{при } p \text{ четном, } q \text{ нечетном,} \\ (q-1)e(F_1)+2e(G_q)+2e(H)+6-e(G_1) & \text{при } p \text{ нечетном, } q \text{ четном.} \end{cases}$$

Тогда существует минимальная стандартная x -корневая индексация T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить справедливость теоремы для дерева, у которого $e(F_1) \leqslant 3$. В дальнейшем будем считать, что $e(F_1) > 3$.

Все четыре случая доказываются сравнением оценок, даваемых предложениями 5 и 6. Разберем, например, случай нечетного p и четного q . Допустим, что в этом случае утверждение неверно и z -некоторая минимальная квазистандартная x - корневая индексация. Как было отмечено выше, большой ветвью с некорневой подиндексацией можно считать F_p , а средней ветвью с индексом большим $ind F_p$ является по предложению 7 ветвь G_q . Сравним z с эталонной индексацией z^*. Очевидно, $\ell^* - \ell > 0$. Подставляя вместо ℓ и ℓ^* их оценки, получаем

$$\sum_{\alpha=1}^{q/2} e(G_{2\alpha-1}) + \ell_y(F_p) - \ell(F_p) - \frac{q}{2} e(F_p) + \ell_y(G_q) - e(G_q) + \ell(H) - \Delta > 0, \quad (3)$$

где $\Delta = \min\{\ell_y(G_q)+\ell(H), \ell(G_q)+\ell(H)+e(H)\}$.

Если бы $\Delta = \ell_y(G_q)+\ell(H)$, то, заменив Δ в (3) его значением и оценив $\ell_y(F_p) - \ell(F_p)$ величиной $\frac{1}{2}e(F_p)$, получили бы $\sum_{\alpha=1}^{q/2} e(G_{2\alpha-1}) > \frac{q-1}{2} e(F_p) + e(G_q)$, что невозможно из-за $e(G_{2\alpha-1}) < e(F_p) (\alpha \leqslant \frac{q}{2})$.

Итак, $\Delta = \ell(G_q) + \ell(H) + e(H)$ и поэтому

$$\sum_{\alpha=1}^{q/2} e(G_{2\alpha-1}) > \frac{q}{2} e(F_p) - \{\ell_y(F_p) - \ell(F_p)\} - \{\ell_y(G_q) - \ell(G_q)\} + e(G_q) + e(H). \quad (4)$$

Можно считать (см. следствие к теореме 7), что $q \neq 0$. Если бы $e(G_q) \leqslant 3$, то из неравенства $1 + [\frac{e(F_p)}{2}] < e(G_q)$ получили бы $e(F_p) \leqslant 3$, что исключено оговоренным условием. Следовательно, справедливы оценки

$$\ell_y(F_p) - \ell(F_p) \leqslant]\frac{e(F_p)}{2}[- 2, \quad \ell_y(G_q) - \ell(G_q) \leqslant]\frac{e(G_q)}{2}[- 2.$$

Соединив их с (4), получим

$$\sum_{\alpha=1}^{q/2} e(G_{2\alpha-1}) > \frac{q}{2} e(F_p) -]\frac{e(F_p)}{2}[+ e(G_q) -]\frac{e(G_q)}{2}[+ e(H) + 4,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{q/2} e(G_{2\alpha}) > \frac{q}{2} e(F_p) -]\frac{e(F_p)}{2}[+ e(G_q) -]\frac{e(G_q)}{2}[+ e(H) - 4 - e(G_1).$$

откуда

$$\sum_{\alpha=1}^{q} e(G_\alpha) > qe(F_p) - 2]\frac{e(F_p)}{2}[+ 2e(G_q) - 2]\frac{e(G_q)}{2}[+ 2e(H) + 8 - e(G_1) \geqslant$$
$$\geqslant (q-1)e(F_p) + e(G_q) + 2e(H) + 6 - e(G_1).$$

Полученное неравенство противоречит условию теоремы и, таким образом, заканчивает ее доказательство.

Приведем такое очевидное

СЛЕДСТВИЕ. Дерево, у которого

$$e(F_1) \leqslant \begin{cases} e(H)+q+3 & \text{при } p \text{ четном, } q \text{ четном,} \\ e(H)+q+4 & \text{при } p \text{ нечетном, } q \text{ нечетном,} \\ e(G_q)+2e(H)+q+5 & \text{при } p \text{ четном, } q \text{ нечетном,} \\ e(G_q)+2e(H)+q+6 & \text{при } p \text{ нечетном, } q \text{ четном,} \end{cases}$$

обладает минимальной стандартной x -корневой индексацией.

Перейдем теперь к изучению минимальных индексаций.

Пусть T - произвольное дерево и z - некоторая его минимальная индексация. Если z - центр масс T и $z'; z''$ - вершины базовой цепи, смежные с z , то рассмотрим два поддерева T' и T'' дерева T , строящиеся следующим образом: $T'(T'')$ - поддерево, порожденное вершиной $z'(z'')$ и вершинами той ветви z , которая содержит $z''(z')$. Ясно, что в $T'(T'')$ вершина $z'(z'')$ является висячей и ограничение z на $T'(T'')$ дает его минимальную $z'(z'')$ - корневую индексацию.

Употребив для так порожденных корневых индексаций доказанные выше результаты, получим утверждения[5], характеризующие исходную индексацию. При формулировке соответствующих результатов будем пользоваться фактически теми же обозначениями, что были использованы ранее. Это, однако, не вызовет путаницы.

---

5) Ясно, что эти утверждения можно получить и непосредственно.

Главные ветви центра масс будем обозначать через $R_1, \dots, R_{p+q}$, считая их упорядоченными по невозрастанию чисел ребер ветви, большие ветви – $F_1, \dots, F_p$, средние – $G_1, \dots, G_q$, H – поддерево, порожденное малыми ветвями.

Индексацию назовем стандартной, если ее базовая цепь проходит через центр масс, все большие ветви которого имеют корневые подындексации. При этом $1 = ind\,F_1 = ind\,F_2 < \dots < ind\,F_{2\alpha-1} = ind\,F_{2\alpha} < \dots \leqslant ind\,F_p \leqslant min\,(ind\,H, ind\,G_1; \dots, ind\,G_q)$.

Индексацию назовем квазистандартной, если ее базовая цепь проходит через центр масс, все главные ветви которого, кроме одной большой – F_i, и в случае четного $p+q$, быть может, одной средней имеют корневые подындексации. При этом, если $R'_1, \dots, R'_t$ последовательность главных ветвей, из которой удалены F_i и в случае четного $p+q$ некоторая средняя ветвь G_j, то все ее элементы имеют корневые подындексации и $1 = ind\,R'_1 = ind\,R'_2 < \dots < ind\,R'_{2\alpha-1} = ind\,R'_{2\alpha} < \dots \leqslant ind\,R'_t < ind\,F_i < min\,(ind\,H, ind\,G_j)$.

ТЕОРЕМА 7. Всякая минимальная индексация либо стандартная, либо квазистандартная.

СЛЕДСТВИЕ. Если у дерева T четное число больших ветвей центра масс и нет средних ветвей, то всякая минимальная индексация стандартная.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть z – минимальная квазистандартная индексация дерева T, у которого число главных ветвей четно. Тогда средней ветвью с индексом большим $ind\,F_p$ является[6] ветвь G_q.

ТЕОРЕМА 8. Если в дереве T выполняется

$$e(G_\alpha) \leqslant \begin{cases} (q-1)e(F_1)+e(H)+3 & \text{при } p \text{ нечетном, } q \text{ четном,} \\ qe(F_1)+e(H)+3-e(G_i) & \text{при } p \text{ четном, } q \text{ нечетном,} \\ (q-2)e(F_1)+2e(G_q)+2e(H)+6 & \text{при } p \text{ нечетном, } q \text{ нечетном,} \\ (q-1)e(F_1)+2e(G_q)+2e(H)+6-e(G_1) & \text{при } p \text{ четном, } q \text{ четном,} \end{cases}$$

то существует минимальная стандартная индексация T.

---

6) F_p – большая ветвь с некорневой подындексацией.

СЛЕДСТВИЕ. Дерево, у которого

$$e(F_1) \leqslant \begin{cases} e(H)+q+3 & \text{при } p \text{ нечетном, } q \text{ четном,} \\ e(H)+q+4 & \text{при } p \text{ четном, } q \text{ нечетном,} \\ e(G_q)+2e(H)+q+5 & \text{при } p \text{ нечетном, } q \text{ нечетном,} \\ e(G_q)+2e(H)+q+6 & \text{при } p \text{ четном, } q \text{ четном,} \end{cases}$$

обладает минимальной стандартной индексацией.

Результаты, изложенные выше, позволяют свести задачи минимальной и минимальной корневой индексации дерева к этим же задачам для поддеревьев, что и дает требуемый алгоритм.

При отыскании минимальной индексации нужно найти центр масс z дерева T, произвести классификацию его ветвей и проверить выполнение условия теоремы 8'.

Если условие выполнено, для каждого $\alpha = 1, \dots, p$ ищем минимальную z – корневую индексацию z_α большой ветви F_α. Для дерева Q, составленного из оставшихся ветвей вершины z, ищем индексацию $\bar{z}$, являющуюся при четном p его минимальной индексацией, а при нечетном p – ограничением на Q, минимальной w – корневой индексацией дерева Q', полученного из Q добавлением висячей вершины w, смежной с z. После отыскания всех указанных индексаций требуемая минимальная индексация z вычисляется по такому правилу

$$z(u) = \begin{cases} z_\alpha(u) + \left]\frac{\alpha}{2}\right[- 1 & \text{при } u \in E(F_\alpha) \quad (\alpha = 1, \dots, p), \\ \bar{z}(u) + \left[\frac{p}{2}\right] & \text{при } u \in E(Q). \end{cases}$$

Если условие теоремы 8' не выполнено, помимо указанных индексаций, строим еще p индексаций $z^{(1)}, \dots, z^{(p)}$. Для каждого i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ построим дерево S, порожденное множеством $V(F_i) \cup V(G_q) \cup V(H)$ или $V(F_i) \cup V(H)$ соответственно при четном или нечетном $p+q$. Пусть z' – минимальная индексация S, а $z_1, \dots, z_t$ – минимальные y – корневые индексации ветвей последовательности $R'_1, \dots, R'_t$, полученной из исходной последовательности главных ветвей удалением тех, что участвовали в построении S. Наконец,

$$z^{(i)}(u) = \begin{cases} z_\alpha(u) + \left]\frac{\alpha}{2}\right[- 1, & \text{если } u \in E(R'_\alpha) \quad (\alpha = 1, \dots, t), \\ z'(u) + \left]\frac{p+q}{2}\right[- 1, & \text{если } u \in E(S). \end{cases}$$

Сравнивая $p+1$ индексации, выбираем ту, у которой сумма индексов минимальна.

Сведение задачи минимальной корневой индексации производится аналогично выше описанному и поэтому может быть опущено. Как уже было отмечено в [6] § 2, приведен алгоритм построения нумерации, соответствующей заданной индексации.

Перейдем к оценке сложности алгоритма. Пусть $\xi(T)$ и $\eta(T)$ означают число элементарных операций, требуемых для отысканий по алгоритму соответственно минимальной и минимальной корневой индексации T (последняя ищется при заданной висячей вершине). Пусть также $\xi(n)=\max\limits_{e(T)=n}\xi(T)$, $\eta(n)=\max\limits_{e(T)=n}\eta(T)$, $\lambda(n)=\max(\xi(n),\eta(n))$.

Покажем, что $\lambda(n)\leqslant Dn^3$ (D – константа).

Доказывать будем по индукции. Для малых n оценка верна за счет выбора константы. Пусть $\forall k<n$ $\lambda(k)<Dk^3$ и дано дерево T с n ребрами.

Для ветвей центра масс z примем такие обозначения:

$$e(F_1)=f\ ,\quad g_\alpha=e(G_\alpha)\ \ (\alpha=1,\dots,q)\ ,\quad h=e(H)\ ,$$

$$\hbar=\begin{cases} h+g_q\ , & \text{если } p+q \text{ четное},\\ h\ , & \text{если } p+q \text{ нечетное}.\end{cases}$$

В работе [9] показано, как найти центр масс дерева за линейное число шагов. Учитывая это, можно записать,

$$\xi(T)\leqslant\begin{cases} Cn+p\eta(f)+\xi(n-pf)\ , & \text{если выполнено условие теоремы } 8',\\ Cn+p\eta(f)+\xi(n-pf)+\sum\eta(g_\alpha)+\xi(f+\hbar), & \text{если условие теоремы } 8' \text{ не выполнено}.\end{cases}$$

Полагаем, что $D>C$. Тогда ясно, что оценка $\xi(T)\leqslant Dn^3$ следует из такой

$$n^3\geqslant\begin{cases} n+pf^3+(n-pf)^3 & \text{при выполнении условия теоремы } 8',\\ n+pf^3+(n-pf)^3+\sum g_\alpha^3+(f+\hbar)^3 & \text{условие не выполнено}.\end{cases}$$

В первом случае, если $n>pf$, то

$$n+pf^3+(n-pf)^3<3pf(n-pf)n+p^3f^3+(n-pf)^3=n^3.$$

Если же $n=pf$, то все ветви центра масс большие и поэтому их не менее двух, откуда $n+pf^3=pf+pf^3\leqslant p^3f^3$. Рассмотрим теперь второй случай. Требуется доказать, что

$$n+pf^3+(n-pf)^3+\sum g_\alpha^3+(f+\hbar)^3\leqslant n^3,$$

или

$$pf+pf^3+h+\sum g_\alpha+\sum g_\alpha^3+(f+\hbar)^3\leqslant p^3f^3+3p^2f^2(n-pf)+3pf(n-pf)^2.$$

Всегда $h+\sum g_\alpha+\sum g_\alpha^3\leqslant f^2(\sum g_\alpha+h)$, $f+\hbar<2f$. Поэтому при $p\geqslant 3$ неравенство следует из такого

$$pf+pf^3+(f+\hbar)^3\leqslant 2pf+8pf^3\leqslant p^3f^3.$$

Поскольку условие теоремы 8 не выполнено, если $p\leqslant 2$, то $q\geqslant 1$, а если $p=1$, то $q\geqslant 2$. Отсюда, при $p=2$

$$2f+h+\sum g_\alpha+2f^3+\sum g_\alpha^3+(f+\hbar)^3\leqslant$$
$$\leqslant 2f+2f^3+8f^3+h+\sum g_\alpha+\sum g_\alpha^3<$$
$$<11f^2(n-2f)+6f(n-2f)^2+8f^3+f^2(n-2f)=(2f)^3+3(2f)^2(n-2f)+$$
$$+3\cdot 2f\cdot(n-2f)^2.$$

а при $p=1$

$$f+h+\sum g_\alpha+f^3+(f+\hbar)^3+\sum g_\alpha^3\leqslant f^2(n-f)+2f^2g_1+\{f^3+3f^2\hbar+3f\hbar^2+\hbar^3\}\leqslant$$
$$\leqslant f^3+f^2(n-f)+2f^2g_1+2f^2\hbar+3f\hbar^2+f^2\hbar+\hbar^3\leqslant$$
$$\leqslant f^3+f^2(n-f)+2f^2(g_1+\hbar)+3f\hbar^2+4fg_1\hbar\leqslant f^3+3f^2(n-f)+3f(n-f)^2.$$

Неравенство $\xi(T)\leqslant Dn^3$ доказано. Аналогичными рассуждениями доказывается $\eta(T)\leqslant Dn^3$ и, следовательно, $\lambda(n)\leqslant Dn^3$.

В заключение отметим, что доказанная оценка завышена. Истинная сложность алгоритма, по-видимому, имеет порядок n^γ , где γ – положительный корень уравнения $5^x-2\cdot 3^x+2^{x+1}=1$. Экстремальный пример $T(n)$ может быть описан так: у центра масс дерева $T(n)$ имеются три ветви, две из которых изоморфны дереву $T([\frac{2n-4}{5}])$, а одна $T(n-2[\frac{2n-4}{5}])$.

Заметим также, что при программировании алгоритма организовывать его нужно таким образом, чтобы минимальная нумерация находилась непосредственно, минуя индексацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Геолецян Г.Г. О задаче оптимального размещения вершин графа на отрезке. ДАН Арм. ССР, 1973, 56, № 5, 269-271.
2. Lawler E.L."The quadratic assignement problem a brief review".Combin.Programming:Methods and Applications, Dordrecht-Boston,1975,pp.351-360.

3. Шейдвассер М.А. Об оптимальной нумерации деревьев. Дискретный анализ, 1970, вып. 17, 56-74.

4. Шейдвассер М.А. О длине и ширине размещений графа в решетках. Проб.киб.,вып. 29, 1974, 63-102.

5. Иорданский М.А. Минимальные нумерации вершин деревьев. ДАН СССР, 218, 1974, № 2, 272-275.

6. Гольдберг М.К., Клипкер И.А. Нумерация равномерного дерева минимизирующая сумму длин ребер. Аннот. докл. семинара ИПМТГУ, т. 10, 1975, 65-71.

7. Гольдберг М.К., Клипкер И.А. Алгоритм минимальной нумерации вершин дерева. Сообщения АН ГССР, 81, 1976, № 3, 553-556.

8. Геолецян Г.Г. Об оптимальных размещениях и их свойствах. ДАН Арм. ССР, 61, 1975, № 2, 65-69.

9. Kang Andy N.C.,Ault David A."Some properties of a centroid of a free tree".Inform.Processing Letters,4,1975, No.2,pp.18-20.

ГОЛЬДБЕРГ Марк Копелевич
КЛИПКЕР Израиль Абрамович

Ответственный за выпуск канд. физ.-мат. наук БЕЛИЦКИЙ Г.Р.

БЦ 20254 , подписано к печати 1/XII - 1976 г., физ.п.л.1,3, учетн.изд.л. 1,3, заказ 6 , тираж 100. Цена 13 коп.

Ротапринт ФТИНТ АН УССР, Харьков-164, пр. Ленина, 47.